Задания для муниципального тура Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2016/2017 учебном году

Ответы и решения

7 класс

1. Ответ. Можно.

Решение. Первым взвешиванием можно получить 13 кг песка, если на одну (левую) чашку весов положить гирю и, отсыпая песок из правой чашки на левую, уравновесить весы. Действительно, из уравнения $3+x=23-x$ получим $x = 10$, т.е. на чашке с гирей будет 10 кг песка. Затем, разделим 10 кг песка пополам по 5 кг. Последним взвешиванием получим 1 кг, если на левую чашку положим гирю, а на другую 5 кг песка и затем отсыпаем на левую чашку для равновесия ровно 1 кг.

2. Ответ. Нет, неверно.

Решение. Приведем пример:

			0
	0	0	0
	0		
0	0		0

3. Ответ. 30 чисел.

Решение. Пусть $\overline{xyz}$ – любопытное трехзначное число. Тогда число

$$A=\overline{xyz}-(x+y+z)=100x+10y+z-(x+y+z)=9(11x+y)$$

делится на 9 и состоит из одинаковых цифр, причем $100-27 \le A \le 999-1$. Таким образом, A может равняться либо 99, либо 333, либо 666.

В случае $A = 99$ имеем $11x+y=11$, тогда $x = 1$, $y = 0$, z – любая цифра, т.е. в этом случае есть 10 любопытных чисел: 100, 101, …, 109.

В случае $A = 333$ получаем $11x+y=37$, тогда последовательно определяем цифры: $x = 3$, $y = 4$, z – любая цифра, т.е. и в этом случае есть 10 любопытных чисел.

В случае $A = 666$ имеем $11x+y=74$, и тогда $x = 6$, $y = 8$, z – любая цифра, опять имеем 10 любопытных чисел.

4. Ответ. 11.

Решение. Обозначим длины сторон маленьких прямоугольников переменными x, y, z, t так, как это указано на рисунке. Тогда

x	**8**		**?**
t	**10**	**16**	**13**
	y		**z**

$$\begin{cases} 2(x+y)=8 \\ 2(t+y)=10 \\ 2(t+z)=13 \end{cases}$$

Заметим, что 2(x+y) – 2(t+y) +2(t+z) с одной стороны равно 11, с другой – 2(x+z), что как раз и является выражением периметра искомого прямоугольника.

5. Ответ. Больше запланированного.

Решение. Пусть s – длина дистанции, v – первоначально запланированная скорость. Тогда запланированное время равно $\frac{s}{v}$, а реальное время равно $\frac{s}{2\cdot 1{,}25v}+\frac{s}{2\cdot 0{,}8v}=\frac{s}{v}\cdot\frac{41}{40}>\frac{s}{v}$.

8 класс

1. Ответ. 112233445.

Решение. Заметим, что в задуманном числе зачеркнули последнюю цифру – цифру единиц. Иначе, сумма была бы четной, т.к. цифра единиц получалась бы в результате сложения двух одинаковых цифр.

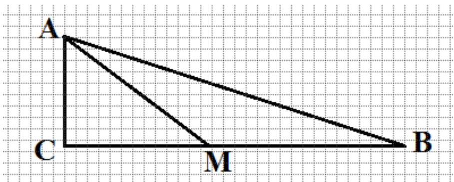
Представим задуманное число в виде 10x+y, где x - четырехзначное число, а y – цифра единиц. После зачеркивания получаем число x. Тогда 10x+y+x = 123456789, т.е. 11x+y = 123456789. Разделим 123456789 на 11, в остатке получим 5. Т.к. y – цифра, а 11x делится на 11, то y=5. Значит, x = 11223344. А задуманное число – 112233445.

2. Ответ: 7,5 м.

Решение. Обозначим скорости v_1 = 80 км/ч, v_2 = 60 км/ч и дистанцию a =10 м = 0,01 км. Вторая машина проезжает знак позже первой на $\frac{a}{v_1}$(час). За это время первая машина проедет расстояние $v_2\cdot\frac{a}{v_1}$ = 7,5 м, с такой дистанцией машины будут двигаться дальше.

3. Решение. Упростим выражение, получим $\frac{1}{b^2}$. А оно положительно при всех допустимых значениях a и b.

4. Решение. После каждого удачного заезда количество денег умножается на 1,1, 10%, а после каждой неудачи - на 0,9. Начальный капитал составляет 10000 копеек, а после нескольких заездов должно получиться 8019 копеек. Разложим число 8019 на множители: $8019=9^3\cdot 11$, значит, $8019=10000\cdot 1{,}1\cdot(0{,}9)^3$. Таким образом, игроку достаточно один раз пройти игру удачно и трижды потерпеть неудачу.



5. Решение. Заметим, что AM не может быть равно CM. Следовательно, биссектриса AM образует равнобедренный треугольник AMB . Значит, <CAM = < MAB = <MBA. Эти три угла в сумме составляют 90°, то есть $3x$=90°, x = 30°. В прямоугольном треугольнике CAM против угла в 30° лежит катет CM, равный половине гипотенузы (биссектрисы). Итак, биссектриса вдвое длиннее второго из этих отрезков.

9 класс

1. Ответ. Может: a = 1008 и b = –1008.

Решение. Если числа a и b удовлетворяют равенству $a^{2016} = b^{2016}$, то a = b либо a = – b. Первый случай невозможен, так как a > b. Если a = – b, то из условия задачи получаем 2a = 2016, откуда a = 1008 и b = –1008.

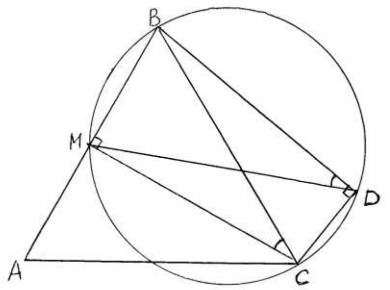
2. Решение. Найдем $f(1) = a + b + c$, $f(2) = 4a + 2b + c$, $f(3) = 9a + 3b + c$. По условию $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ делятся на 3, поэтому и $f(1) + f(2) + f(3) = 14a + 6b + 3c$ будет делиться на 3, откуда следует, что число *a* кратно 3 (в силу того, что 14*a* кратно 3, а 14 и 3 взаимно просты). Далее $f(2) - f(1) = 3a + b$ делится на 3, тогда и b делится на 3. Наконец, из равенства $f(3) = 9a + 3b + c$ следует, что *c* кратно 3. Следовательно, в квадратном трехчлене $f(x) = ax^2 + bx + c$ все коэффициенты делятся на 3, поэтому при любом целом *x* $f(x)$ будет также делиться на 3.

3. Ответ. Можно.

Решение. По первой команде оставим школьника с номером 5 на месте, а следующие номера меняются местами: 1 и 9, 2 и 8, 3 и 7, 4 и 6. Тогда получим расположение 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. По второй команде оставим на месте номер 9, а номера 8 и 1, 7 и 2, 6 и 3, 5 и 4 меняются местами. Тогда получим требуемое расположение 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

4. Ответ. 30°.

Решение.



Построим окружность с диаметром *BC*. Тогда точки D и *M* будут лежать на этой окружности как вершины прямых углов, опирающихся на диаметр. Углы BDM и B*C*M – вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу *BM*. Следовательно, $\angle BDM = \angle BCM = 30^{\circ}$.

5. Ответ. Обе хозяйки потратили одинаковую сумму денег, при этом вторая хозяйка за месяц купила больше молока.

Решение. Пусть a_i $(i = 1, 2, \ldots, 30)$ - цена молока за 1 литр. По условию

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{30}}{30} = 20.$$

Тогда первая хозяйка потратила $a_1 + a_2 + \ldots + a_{30} = 30 \cdot 20 = 600$ рублей, вторая 20·30=600 рублей. Таким образом, обе хозяйки потратили одинаковую сумму денег.

Первая хозяйка за месяц купила 30 литров молока, вторая

$$\frac{20}{a_1} + \frac{20}{a_2} + \ldots + \frac{20}{a_{30}} = S.$$

Из равенства $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{30}}{30} = 20$ следует

$$\frac{a_1}{20}+\frac{a_2}{20}+\ldots+\frac{a_{30}}{20}=30.$$

Тогда $S+30=(\frac{20}{a_1}+\frac{a_1}{20})+(\frac{20}{a_2}+\frac{a_2}{20})+\ldots+(\frac{20}{a_{30}}+\frac{a_{30}}{20})\geq 2\cdot 30$,

откуда получаем $S\geq 30$.

Так как равенство возможно лишь в случае, когда все числа равны между собой, то получим $S>30$. Следовательно, вторая хозяйка за месяц купила больше молока.

10 класс

1. Ответ. 1 или 2.

Решение. Применяя теорему Виета, получим систему

$$\begin{cases} p^2-4q=D, \\ p=-3D, \\ q=2D^2. \end{cases}$$

Решая систему, получим D=0 или D=1. Учитывая, что $D\neq 0$, будем иметь D=1. Тогда $x_1=1,\ \ x_2=2$.

2. Ответ. 3616.

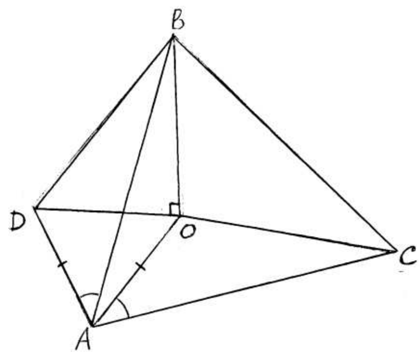
Решение. Так как никакое двузначное число не может удовлетворять условию задачи, то искомое число можно представить в виде $A=100x+16$, где x – некоторое натуральное число. Число A делится на 16 тогда и только тогда, когда x делится на 4. Учитывая, что сумма цифр числа A равна 16, то сумма цифр числа x должна быть равной 9. Следовательно, необходимо найти наименьшее натуральное число x, кратное 4, и имеющее сумму цифр, равную 9. На основе признака делимости на 9 заключаем, что число x должно делиться и на 4, и на 9. Так как числа 4 и 9 взаимно просты, то x делится на их произведение, то есть на 36. Наименьшим из таких натуральных чисел x является число 36, которое, очевидно, удовлетворяет условию задачи. Следовательно, искомое число A = 3616.

3. Ответ. Можно.

Решение. По первой команде оставим на месте номер 1 и номер 6, а следующие номера меняются местами: 2 и 10, 3 и 9, 4 и 8, 5 и 7. Тогда получим расположение 1, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2. По второй команде меняются местами номера: 1 и 10, 9 и 2, 8 и 3, 7 и 4, 6 и 5. В результате получим требуемое расположение 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

4. Ответ. $\angle AOB$=150°.

Решение.



Построим на отрезке AO правильный треугольник AOD со стороной 3 так, чтобы точки O и D находились в разных полуплоскостях относительно прямой AB. Тогда треугольники ADB и AOC будут равны по двум сторонам и углу между ними: $AB=AC$ (по условию), AD= AO (по построению), $\angle$DAB=$\angle OAC$ (как углы, которые дополняются одним и тем же углом $\angle BAO$ до 60^o).

Поэтому BD= 5 и треугольник DOB – прямоугольный, как треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Следовательно, $\angle$BOD=90^o. Тогда $\angle AOB$=$\angle$AOD+ $\angle$DOB= 60^o+90^o= 150^o.

5. Решение. Рассмотрим разность

$$\frac{a}{b+ab}+\frac{b}{a+ab}-1=\frac{a^2+b^2-ab-a^2b^2}{(a+ab)(b+ab)}.$$

Доказательство исходного неравенства теперь сводится к проверке неравенства

$$a^2+b^2-ab-a^2b^2\ge 0.$$

По условию $a+b\le 2$, поэтому $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}=1,$ то есть $ab\le 1$. Тогда $a^2b^2\le ab$ и

$$a^2+b^2-ab-a^2b^2\ge a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\ge 0.$$

11 класс

1. Ответ. 2; 3; 5.

Решение. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что

$$p<q<r.$$

Если $p\ge 3$, то $pq+qr+rp<3qr\le pqr$.

Последнее неравенство противоречит данному неравенству. Поэтому $p<3$, то есть $p=2$.

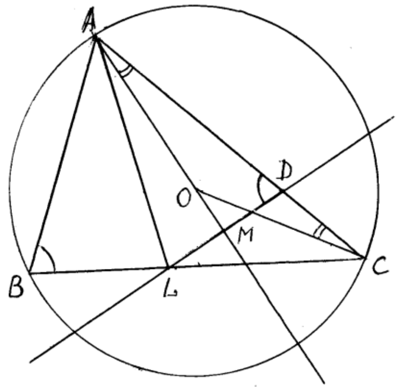
Тогда из неравенства $pqr<pq+qr+rp$ будем иметь $2qr<2q+qr+2r$, то есть $qr<2q+2r$. Учитывая, что $q<r$, получим $qr<2q+2r<4r$, откуда получим $q<4$, то есть q=3. Наконец, для нахождения r получаем неравенство $6r<6+3r+2r$, то есть $r<6$, откуда получаем $r=5$.

2. Ответ. 29.

Решение. Поскольку однозначные числа не имеют общих цифр, то $n>9$. А так как числа, соседние с числом 9, должны содержать девятку в своей записи, то меньшее из них не может быть меньше, чем 19, а большее - меньше, чем 29. Следовательно, $n\ge 29$.

Равенство $n=29$ возможно, поскольку условию задачи удовлетворяет, например, такой порядок расстановки чисел от 1 до 29 по кругу: 1, 11, 10, 20, 21, 12, 2, 22, 23, 3, 13, 14, 4, 24, 25, 5, 15, 16, 6, 26, 27, 7, 17, 18, 8, 28, 29, 9, 19.

3. Решение.



Пусть $\angle ABC=\beta$, тогда $\angle AOC=2\beta$ как центральный угол, опирающийся на ту же дугу AC. Так как треугольник ACO – равнобедренный, то $\angle OAC=90^{o}-\beta$. Далее, треугольники ABL и ADL равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle ADL=\beta$. Пусть M – точка пересечения прямых AO и LD. Тогда $\angle MAD+\angle MDA=90^{o}$, откуда следует, что треугольник AML – прямоугольный.

4. Ответ. a=2.

Решение. Заметим, что если (x_o, y_o) - решение системы, то $(-x_o, y_o)$ также является ее решением. Поэтому условие x=0 – необходимое (но не достаточное) для существования единственного решения.

Положим x=0, тогда

$$\begin{cases} a = y+1, \\ y^2 = 1. \end{cases}$$

Из полученной системы получаем два возможных значения параметра: a=0 или a=2.

Проверим, удовлетворяют ли найденные значения параметра a условию задачи.

При a=0 получаем

$$\begin{cases} y+\cos x = 0, \\ \sin^2 x + y^2 = 1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} y = -\cos x, \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1. \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечно много решений. Следовательно, a=0 не удовлетворяет условию задачи.

При a=2 получим

$$\begin{cases} 2(|x|+1) = y+\cos x, \\ \sin^2 x + y^2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $|y| \le 1$. При этом условии для правой части первого уравнения системы справедливо неравенство $y+\cos x \le 2$. В то же время очевидно $2(|x|+1) \ge 2$. Таким образом, если система имеет решение, то одновременно должны выполняться равенства $y+\cos x = 2$ и $2(|x|+1) = 2$. Отсюда получаем $x=0$ и y =1. Проверка показывает, что пара (0; 1) – является решением системы, и в силу доказанного единственное. Следовательно, a=2 является решением задачи.

5. Решение. Пусть $A_1, \ldots, A_k$ - богатыри из некоторого города N. Предположим, что кубки обошли полный круг. Тогда у каждого из богатырей A_i побывал каждый из золотых кубков. Следовательно, они держали золотые кубки в руках $n \cdot k$ раз. Так как $1 < n < 13$, то $n \cdot k \ne 13$.

Если $n \cdot k > 13$, то в какой-то момент у богатырей из города N было 2 золотых кубка одновременно, и в этом случае все доказано.

Если окажется $n \cdot k < 13$, то тогда в некоторый момент у богатырей из города N не было ни одного золотого кубка. Поскольку число золотых кубков равно числу городов, то в этот момент 2 золотых кубка были у богатырей какого-то другого города *M*, что и требовалось.

Критерии оценивания и организация проверки работ

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, оцениваются частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство леммы, нахождение примера и т.п.). Таким образом, при подсчете окончательных баллов по задаче жюри учитывает все перечисленные случаи, а также возможные логические и арифметические ошибки в решениях.

Проверка работ на математической олимпиаде проводится в два этапа. На первом этапе жюри производит проверку работ без выставления баллов, по так называемой системе «в плюсах и минусах». Знак выставляется в соответствии с приведенной ниже таблицей. При этом предварительная оценка по системе «плюс-минус» может быть незначительно изменена после обсуждения критериев и классификации случаев.

Знак	**Правильность решения**
+	Полное верное решение
+.	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение
±	Решение в целом верное. Однако решение содержит существенные ошибки либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений
+/2	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка
∓	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
−.	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения
−	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует

Иногда выставляется оценка «+!», чтобы отметить правильное красивое решение.

По окончании первого этапа проверки группа проверяющих по каждой задаче, анализируя и обобщая приведенные решения, выделяет различные способы решения, типичные частичные продвижения, основные ошибки. В соответствии со сравнительным анализом различных продвижений вырабатывается шкала критериев оценивания.

На втором этапе выставляются окончательные баллы по каждой задаче. В соответствии с регламентом проведения математических олимпиад школьников каждая задача оценивается в 7 баллов. В таблице приведена шкала перевода знаков в баллы.

Знак	+	+.	±	+/2	∓	−.	−	0
Баллы	7	6-7	5-6	4	2-3	0-1	0	0

Максимальный балл за выполнение всех заданий – 35.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Баллы не снимаются за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри.

В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, оценивается в 0 баллов.

Традиционной ошибкой школьников при решении задач на доказательство является использование доказываемого утверждения в качестве начального условия или основы доказательства. Например, в задаче требуется доказать, что треугольник является равнобедренным, а доказательство начинается со слов: «Пусть треугольник ABC − равнобедренный». Подобные «решения» оцениваются в 0 баллов в силу грубой логической ошибки.

Каждая работа оценивается и проверяется (перепроверяется) не менее чем двумя членами жюри.

После опубликования предварительных результатов проверки олимпиадных работ Участники имеют право ознакомиться со своими работами, в том числе сообщить о своем несогласии с выставленными баллами. В этом случае Председатель жюри Олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по работе может быть изменена, если запрос Участника об изменении оценки признается обоснованным. Изменение оценки согласуется с Председателем жюри и вносится в итоговую таблицу.

По результатам олимпиады создается итоговая таблица по каждой параллели.